

УДК 621.658.012.531

**А. И. Бохонский**, д-р техн. наук, проф., **Е. С. Елькина**, аспирант,  
**Л. А. Шмидт**, ст. преподаватель  
Севастопольский государственный университет  
E-mail: *bohon.alex@mail.ru*

## ГАСИТЕЛЬ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ НЕЖЕСТКИХ ВАЛОВ ПРИ ТОКАРНОЙ ОБРАБОТКЕ

*Исследованы колебания системы «нежесткая заготовка - пассивный динамический гаситель изгибных колебаний» при автоматической токарной обработке нежестких валов, оценена эффективность снижения уровня колебаний валов при использовании предложенного гасителя.*

**Ключевые слова:** нежесткая заготовка, токарная обработка, изгибные колебания, динамический гаситель.

**A. I. Bokhonsky, E. S. Elkina, L. A. Shmidt**

## DAMPER FLEXURAL VIBRATIONS OF NON-RIGID SHAFTS FOR TURNING

*Oscillations of the system "non-rigid blank - passive dynamic absorber bending vibrations" for automatic turning of flex shafts, evaluated the effectiveness of reducing vibrations of shafts using a damper.*

**Keywords:** non-rigid workpiece, turning, bending vibrations, the dynamic damper.

Основам расчета систем виброизоляции, защите объектов от вибраций и ударов с использованием динамических гасителей колебаний посвящены работы [1 – 5]. Теоретические и экспериментальные исследования применения гасителей при автоматической токарной обработке нежестких деталей приведены в [4], показана эффективность применения специального гасителя, который взаимодействует с концевым сечением заготовки, закрепленной в центрах. В [5] предложена модель и техническое решение для гасителя крутильных колебаний, выполнен расчет параметров гасителя и оценена эффективность, высказано предположение о совмещении в одной конструкции гасителя изгибных и крутильных колебаний.

Совершенствование динамических гасителей и способов их практического использования предполагает уточнение моделей расчета с последующим широким численным анализом и экспериментальной проверкой.

*Цель исследований* – моделирование динамического поведения системы «нежесткая заготовка – пассивный гаситель изгибных колебаний» при токарной обработке валов.

### **1. Определение статических и кинематических параметров обрабатываемой нежесткой заготовки.**

Заготовка, закрепленная в патроне и центре, один раз статически неопределенна. Для раскрытия статической неопределенности и определения перемещения среднего сечения заготовки использован метод начальных параметров [6]; из условий равновесия ( $\sum P_{ky} = 0, \sum M_B = 0$ ) и равенства нулю перемещения на правой опоре  $y(L) = 0$  получена система линейных алгебраических уравнений для определения опорного момента  $M_0$  и реакций  $Q_0, Y_B$  (рисунок 1):

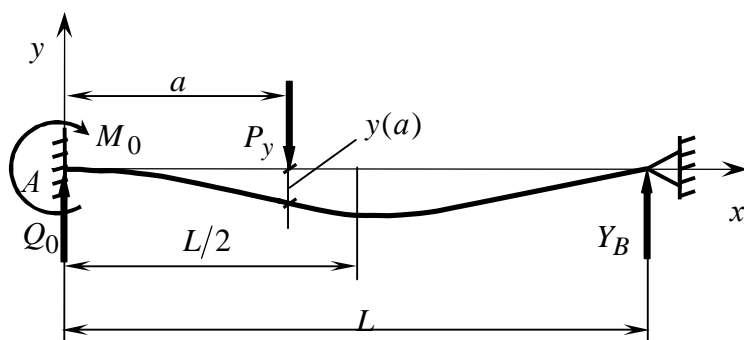


Рисунок1 - Схема деформирования заготовки.

$$\begin{aligned}
 Q_0 - P_y + Y_B &= 0, \\
 Y_B L - P_y a - M_0 &= 0, \\
 y(L) &= \frac{1}{EJ} \left\{ \frac{M_0 L^2}{2} + \frac{Q_0 L^3}{6} - P_y \frac{(L-a)^3}{6} \right\} = 0,
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

где  $EJ$  – изгибная жесткость заготовки;  $a$  – координата силы резания  $P_y$ . При  $a = L/2$  из системы (1) следует:

$$M_0 = -\frac{3}{16} P_y L; \quad Q_0 = \frac{11}{16} P_y; \quad Y_B = \frac{5}{16} P_y
 \tag{2}$$

Прогиб по середине заготовки равен:

$$y_1(L/2) = -\frac{7P_y L^3}{768EJ}
 \tag{3}$$

Из (3) коэффициент жесткости для заготовки с одной степенью свободы (с приведенной к среднему сечению массой)

$$C_1 = \frac{768EJ}{7L^3}
 \tag{4}$$

Угол поворота сечения заготовки на правом конце согласно методу начальных параметров равен

$$\Theta_B(L) = \frac{P_y L^2}{32EJ}
 \tag{5}$$

Из (3) и (5) находим связь между углом поворота и прогибом:

$$\Theta_B(L) = \frac{24}{7L} y(L/2)
 \tag{6}$$

По аналогии с предыдущим алгоритмом найден прогиб по середине заготовки от правого опорного момента:

$$y_M(L/2) = -\frac{M_i L^2}{64EJ}
 \tag{7}$$

Угол поворота правого опорного сечения от  $M_i$  равен:

$$\Theta_{M_i}(L) = \frac{M_i L}{4EJ}
 \tag{8}$$

Таким образом, из (7) получена зависимость

$$M_i = -\frac{64EJ}{L^2} \cdot y_M(L/2) \tag{9}$$

На основании принципа суперпозиции общий опорный момент  $M_B$  образуется как алгебраическая сумма моментов в связи с поворотом сечения от изгиба заготовки и от деформации самого гасителя (рисунок 2)

$$M_B = C_2 y_2 \cdot 2R - C_2 \frac{24}{7L} \cdot 2R^2 \cdot y_1(L/2), \tag{10}$$

где  $C_2$  – коэффициент изгибной жесткости гасителя;  $R$  – радиус гасителя.

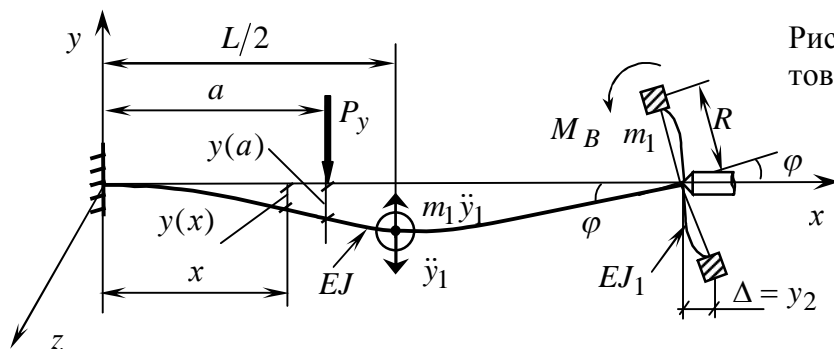


Рисунок 2 - Схема модели «заготовка-гаситель».

Перемещение сосредоточенной массы  $m_1$  заготовки от опорного момента

$$f_M(L/2) = -\frac{M_B L^2}{64EJ} = -\frac{C_2 R L^2}{32EJ} y_2 + \frac{C_2 24}{7} \cdot 2R^2 \cdot \frac{L}{64EJ} y_1(L/2) \tag{11}$$

Итак, перемещение массы  $m_1$  равно

$$f_M(L/2) = -\frac{C_2 R L^2}{32EJ} y_2 + \frac{C_2 3R^2 L}{28EJ} \cdot y_1(L/2) \tag{12}$$

## 2. Колебания нежесткой заготовки с гасителем

Дифференциальные уравнения движения системы «заготовка – пассивный динамический гаситель колебаний» основаны на использовании принципа Даламбера и принципа независимости действия сил

$$y_1 = \delta_{11}(-m_1 \ddot{y}_1 + F(t) + f_M), \tag{13}$$

где удельное перемещение  $\delta_{11}$  от  $P_y = 1$  по направлению  $P_y$  в статически неопределимой системе. После раскрытия статической неопределимости найдено удельное перемещение

$$\delta_{11} = -\frac{7L^3}{768EJ} \tag{14}$$

и с учетом (13) перемещение среднего сечения заготовки

$$y_1 = -\frac{m_1 7L^3}{768EJ} \ddot{y}_1 - \delta_{11} F(t) + \frac{C_2 3R^2 L}{28EJ} \cdot y_1(L/2) - \frac{C_2 R L^2}{32EJ} y_2 \tag{15}$$

Таким образом, уравнение (15) сводится к виду

$$\ddot{y}_1 + \frac{1}{\delta_{11} m_1} y_1 + \frac{C_2 3R^2 L}{28EJ \delta_{11} m_1} \cdot y_1 - \frac{C_2 R L^2}{32EJ \delta_{11} m_1} y_2 - \frac{F(t)}{m_1} = 0 \tag{16}$$

После преобразований система уравнений движения “заготовка – гаситель” принимает вид:

$$\ddot{y}_1 + \left( \frac{768EJ}{7m_1L^3} + \frac{576C_2}{49m_1} \frac{R^2}{L^2} \right) \cdot y_1 - \frac{24R}{7Lm_1} C_2 y_2 = \frac{F(t)}{m_1}, \quad (17)$$

$$\ddot{y}_2 + \frac{C_2}{m_2} \cdot y_2 - \frac{24}{7m_2} \cdot \frac{R}{L} C_2 y_1 = 0,$$

где  $F(t) = P \sin \omega_0 t$ ,  $\omega_0$  – частота вращения заготовки при обработке. Из (17) следует определитель для частоты собственных колебаний:

$$\begin{vmatrix} C_1 + C_{21} - \omega^2 m_1 - C_{22} & \\ & -C_{22} + C_2 - m_2 \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (18)$$

или  $(C_1 + C_{21} - \omega^2 m_1)(C_2 - m_2 \omega^2) - C_{22}^2 = 0,$  (19)

где  $C_1 = \frac{768EJ}{7L^3}$ ;  $C_{21} = \frac{576C_2}{49} \frac{R^2}{L^2}$ ;  $C_{22} = \frac{24R}{7L} \cdot C_2$ ;  $C_2 = \omega_0^2 m_1$ .

Численный анализ выполнен при следующих исходных данных: длина заготовки  $L = 0,7$  м, диаметр  $d = 0,02$  м, осевой момент инерции поперечного сечения заготовки  $J = \pi d^4 / 64 = 7,853982 \cdot 10^{-9}$  м<sup>4</sup>, модуль упругости первого рода  $E = 2,1 \cdot 10^{11}$  Па, число оборотов заготовки при точении  $n = 700$  об/мин, угловая скорость вращения заготовки  $\omega_0 = \pi n / 30 = 73,3038$  с<sup>-1</sup>, общая масса заготовки  $m_1 = (\pi d^4 / 4) \cdot \rho_0 \cdot L = 1,715$  кг, где  $\rho_0 = 7800$  кг/м<sup>3</sup> – плотность материала; принятая масса гасителя  $m_2 = m_1 / 4 = 0,428828$  кг, радиус диска гасителя  $R = 0,05$  м.

При известной частоте  $\omega_0$  коэффициент изгибной жесткости упругих элементов динамического гасителя изгибных колебаний вычисляется как  $C_2 = m_2 \omega_0^2$ . Интересно, что для принятых исходных данных частоты собственных колебаний согласно (19) в данном примере равны:  $\omega_1 = \omega_0 = 73,3$  с<sup>-1</sup>,  $\omega_2 = 554,658$  с<sup>-1</sup>. Таким образом, в этой системе возможен резонанс, в котором будет находиться пассивный динамический гаситель. Согласно идее классического динамического гасителя колебаний [1] из дифференциальных уравнений (17) получена система алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} (C_1 + C_{21} - \omega_0^2 m_1) A_1 - C_2 A_2 &= P, \\ -C_{22} A_1 + (C_2 - m_2 \omega_0^2) A_2 &= 0, \end{aligned}$$

из которых амплитуда вынужденных колебаний заготовки должна быть равна нулю

$$A_1 = \frac{P(C_2 - m_2 \omega_0^2)}{(C_1 + C_{21} - \omega_0^2 m_1)(C_2 - m_2 \omega_0^2) + C_{22}^2} = 0,$$

тогда  $C_2 = m_2 \omega_0^2$ .

Система (17) с целью интегрирования при использовании функции *dsolve* в Maple преобразована к виду

$$\frac{dy_1}{dt} - V_1 = 0, \quad \frac{dV_1}{dt} + ((C_1 + C_{21})y_1 - C_{22}y_2) / m_1 = \frac{P}{m_1} \sin \omega_0 t, \quad (20)$$

$$\frac{dy_2}{dt} - V_2 = 0, \quad \frac{dV_2}{dt} + (C_2 y_2 - C_{22} y_1) / m_2 = 0,$$

где  $C_1 = \frac{768EJ}{7L^3}$ ;  $C_{21} = \frac{576C_2 R^2}{49 L^2}$ ;  $C_{22} = \frac{24R}{7L} \cdot C_2$ ;  $C_2 = m_2 \omega_0^2$ .

Без динамического гасителя после интегрирования уравнения движения заготовки

$$\frac{dy_1}{dt} - V_1 = 0, \quad \frac{dV_1}{dt} + \frac{C_1}{m_1} y_1 = \frac{P}{m_1} \sin \omega_0 t$$

при  $P = 200 \text{ Н}$  и нулевых начальных условиях  $y_1(0) = 0, V_1(0) = 0$  график  $y_1(t)$  изображен на рисунке 3. При нулевых начальных условиях  $y_1(0) = 0, V_1(0) = 0, y_2(0) = 0, V_2(0) = 0$  после интегрирования системы (20) графики движения заготовки и гасителя изображены на рисунке 4. Амплитуда вынужденных колебаний заготовки при использовании гасителя почти в пять раз меньше амплитуды колебаний заготовки без гасителя. Гаситель находится в резонансном режиме, при учете реального линейно-вязкого сопротивления колебания гасителя стабилизируются.

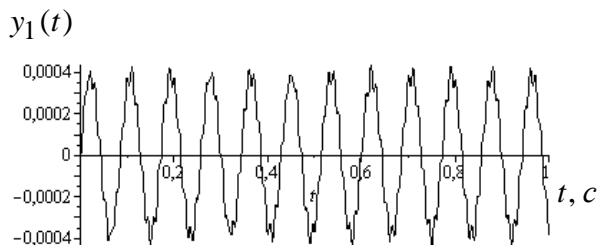


Рисунок 3 - График  $y_1(t)$  колебаний заготовки при отсутствии динамического гасителя.

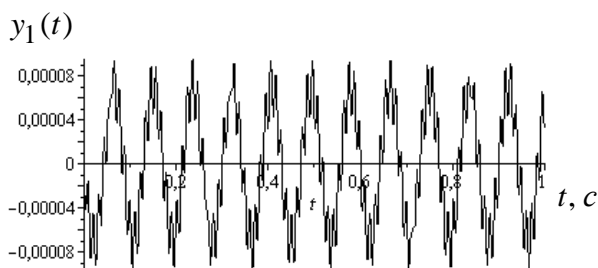
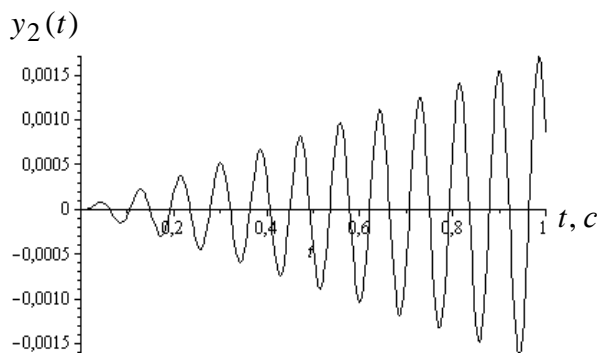


Рисунок 4 - Графики колебаний заготовки с гасителем:  $y_1(t)$  – график колебаний среднего сечения заготовки;  $y_2(t)$  – график колебания гасителя.



### 3. Конструирование гасителя.

При известном коэффициенте жесткости  $C_2$  определяются параметры упругого элемента гасителя в виде радиальных стержней (рисунок 5).  $C_2 = \frac{24EJ_1}{L_1^3}$ . Для круглого

поперечного сечения упругого элемента  $J_1 = \pi d_1^4/64$  и диаметр равен  $d_1 = \sqrt[4]{\frac{64C_2L_1^3}{24\pi E}}$ .

За счет выбора массы  $m_2$  кольца представляется возможным настроить гаситель с учетом параметров обрабатываемой заготовки.

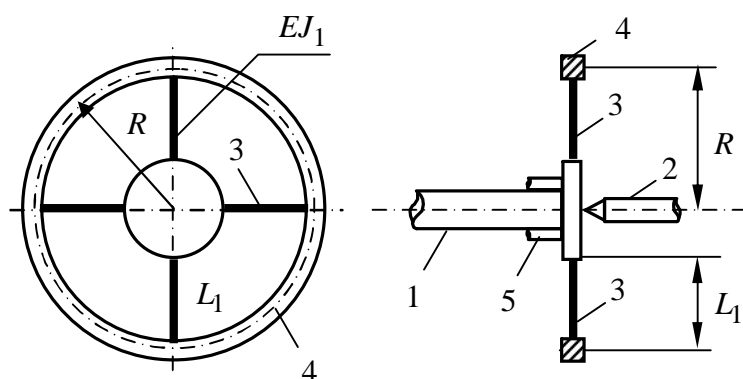


Рисунок 5 - Схема динамического гасителя изгибных колебаний нежесткой заготовки: 1 – нежесткая заготовка; 2 – центр; 3 – упругие элементы гасителя; 4 – кольцо массы  $m_2$ ; 5 – фиксаторы.

Рассмотренная конструкция динамического гасителя не исключает совмещения функций гашения как изгибных, так и крутильных колебаний обрабатываемой нежесткой заготовки.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Бидерман, В. Л. Прикладная теория механических колебаний / В. Л. Бидерман. - М.: Высшая школа, 1972. – 416 с.
2. Вибрации в технике: Справочник. В 6 т. Т. 6. Защита от вибраций и ударов. – М.: Машиностроение, 1981. – 456 с.
3. Фролов, К. В. Прикладная теория виброзащитных систем / К. В. Фролов, Ф. А. Фурман. - М.: Машиностроение, 1980 – 279 с.
4. Бохонский, А. И. Управление деформированием нежестких деталей при токарной обработке: монография / А. И. Бохонский, А. Н. Вохмянин. – Севастополь: Сев-ГТУ, 1999. – 240 с.
5. Бохонский, А. И. Динамический гаситель крутильных колебаний нежесткой заготовки при токарной обработке / А. И. Бохонский, Е. С. Елькина. // Автоматизация проектирования в машиностроении: Материалы IV международной заочной научно-практической конференции. – Новокузнецк. НИЦ МС, 2016. – №4. – С. 68 – 71.

Поступила в редколлегию 01.02.2017г.